ΔTopMath

Элементарная математика

Тригонометрия

Радько Петр

14 ноября 2016 г.

Оглавление

Как работать с учебником?

1 Условные обозначения

В тексте учебника используется большое количество разных блоков. Они нужны для фокусировки внимания на определениях, теоремах и заданиях.

Определения выделяются блоками с синей пунктирной границей:

Определение 0.1

Текст определения

Теоремы выделяются блоками с красной пунктирной границей. Все теоремы, помимо номера, имеют и свои названия (чтобы было проще запоминать). Названия выделяются жирным текстом:

Теорема 0.1

Название теоремы: содержание теоремы

Доказательство теоремы начинается с жирного текста «Доказательство» и заканчивается черным квадратом:

Доказательство
Текст доказательства ■

Задания выделяются блоками зеленого цвета:

Задание 0.1

Текст задания

Сложные задачи помечаются звездочкой:

Задание 0.2*

Текст сложного задания

Обязательно выполняйте задания! Материал главы во многом основан на результатах, которые вы получите в ходе решения. К каждому заданию есть указание, ответ и подробное решение. Они расположены в разделе «Ответы, решения и указания».

В конце каждой главы расположены блоки со всем ключевыми моментами, которые надо обязательно запомнить и усвоить. Они выделяются блоками с синей границей. Каждый ключевой момент отделен от другого тонкой голубой горизонтальной линией:

Название и номер главы

Текст ключевой теоремы, определения или рисунок.

Еще один ключевой момент.

Последний ключевой момент.

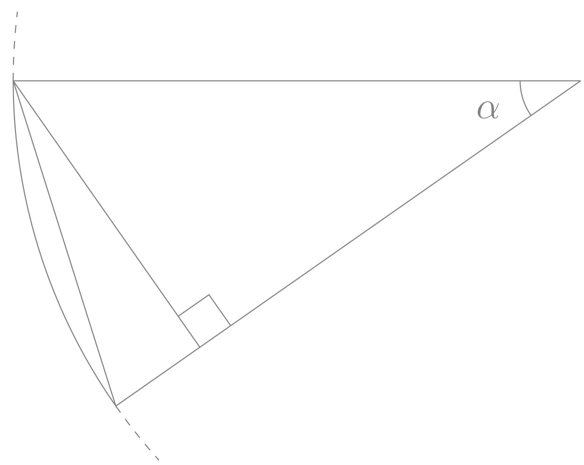
2 Нумерация

Расскажу о том, каким образом происходит нумерация глав, разделов, подразделов, определений, теорем и заданий.

Главы и разделы нумеруются просто цифрами. В каждой главе нумерация разделов сбрасывается и начинается с 1. Подразделы нумеруются следующим образом: номер_раздела.номер_подраздела.

Определения, теоремы, задания, рисунки и таблицы не связаны с разделами и подразделами. Они зависят только от главы и нумеруются так (на примере определений): номер_главы.номер_определения.

Доказательства не нумеруются.



Глава 1

Знакомство с тригонометрией

В этой главе вы узнаете поразительное свойство прямоугольных треугольников, познакомитесь с синусом, косинусом и тангенсом, а также узнаете новый способ измерения величины углов — радианную меру угла.

Что надо знать?

Вам будет легче понять материал этой главы, если вы знакомы со следующими несложными понятиями из геометрии:

- равносторонний и равнобедренный треугольники;
- признаки подобия и равенства треугольников;
- высота треугольника, проведенная к какой-либо его стороне;
- квадрат и его диагонали;
- окружность, ее диаметр, радиус и хорды;
- виды углов, сумма углов в треугольнике.

1 Стороны в треугольниках

Тригонометрия с греческого переводится как «измерение треугольников». Однако изучением и измерением геометрических фигур (в том числе и тре-

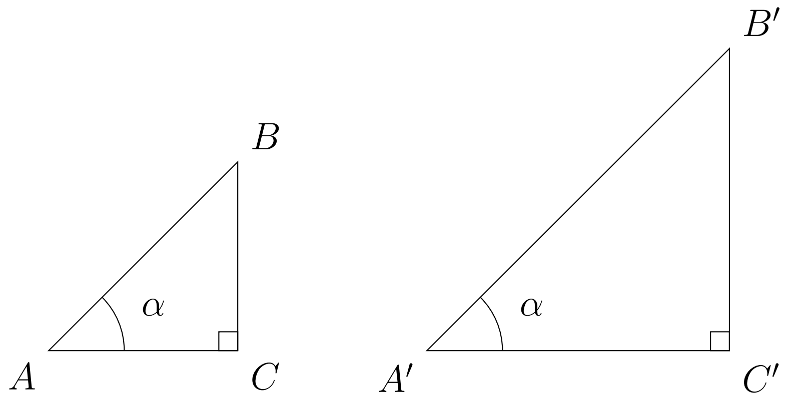


Рис. 1.1

угольников) занимается геометрия. Что такого необычного нашли в треугольниках? Зачем создали целый новый раздел в математике? Давайте найдем ответы на эти вопросы!

Может показаться, что геометрия полностью изучила треугольники. В самом деле, мы знаем 3 разных признака равенства треугольников, 3 признака подобия. Нам известна замечательная теорема Пифагора и многое другое. Таким образом, рассматривать чисто стороны и углы не имеет никакого смысла. С этим вполне справляется геометрия.

Но что если рассматривать отношения сторон? Возьмем к примеру прямоугольный треугольник ABC (смотрите рисунок 1.1). Обозначим один из острых углов (без разницы какой) за α. Рассмотрим отношение катета BC этого треугольника, который лежит напротив угла α, к гипотенузе AB. С виду ничего необычного. Но оказывается, если мы возьмем любой другой прямоугольный треугольник $A'B'C'$, у которого острый угол тоже равен α, то у него отношение катета, лежащего напротив α, к гипотенузе, будет равно этому отношению для треугольника ABC!

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

Доказательство

Для начала давайте покажем, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Для этого воспользуемся признаком подобия треугольников, который формулируется так: «если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны».

В нашем случае у обоих треугольников $\angle C = \angle C'$, так как они оба прямые. Более того, выше я написал, что один из острых углов у обоих треугольников равен α. Значит эти треугольники подобны по двум углам, прямому и α.

У подобных треугольников сходственные стороны (то есть стороны, которые лежат напротив одного и того же угла) пропорциональны или, простым языком:

$$\frac{AB}{A'B'} = k \qquad \frac{BC}{B'C'} = k$$

Теперь выразим AB и BC из формул выше.

$$BC = kB'C'$$
$$AB = kA'B'$$

Заключительный этап. Рассмотрим отношение катета, лежащего напротив α, к гипотенузе и используем две формулы, выведенные выше:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{kB'C'}{kA'B'} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

■

Но это еще не все. На самом деле вообще отношения двух любых сторон в прямоугольных треугольниках с равным острым углом равны между собой!

Теорема 1.1

Теорема о соотношениях сторон в треугольниках: Для любых прямоугольных треугольников с острым углом, равным α, отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных им сторон в другом треугольнике.

Опять посмотрим на рисунки треугольников выше. Теорема о соотношениях сторон в треугольниках утверждает, что:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Доказательство этой теоремы проводится точно таким же образом, как и вышеприведенное доказательство равенства $BC/AB = B'C'/A'B'$. Только в этом случае нам придется доказывать эти равенства для любых двух сторон прямоугольного треугольника, что очень скучно.

Задание 1.1

Покажите, что теорема выше на самом деле выполняется для любых подобных треугольников (не только прямоугольных) и является следствием пропорциональности сходственных сторон треугольников.

Ответ на с. 25

2 Синус, косинус, тангенс

В предыдущем разделе мы обнаружили новое свойство прямоугольных треугольников. Однако согласитесь, что произносить фразу «отношение катета, лежащего напротив острого угла к гипотенузе» долго и сложно. Поэтому для этого и других отношений сторон в прямоугольном треугольнике придумали специальные названия.

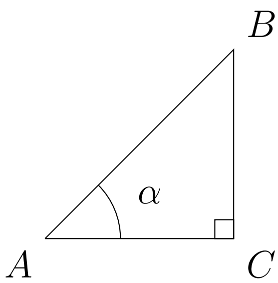


Рис. 1.2: $\sin(\alpha) = BC/AB$ и $\operatorname{tg}(\alpha) = BC/AC$.

2.1 Синус и тангенс

Определение 1.1

Синус острого угла α прямоугольного треугольника — отношение катета, лежащего напротив этого угла, к гипотенузе.

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \tag{1.1}$$

А что если мы возьмем отношение катета, лежащего напротив острого угла, к катету, прилежащему к этому углу? Ведь по теореме о соотношениях сторон в треугольниках это отношение тоже будет одинаковым для любых прямоугольных треугольников с одинаковым острым углом. Именно! И да, у этого отношения тоже есть свое название — **тангенс**.

Определение 1.2

Тангенс острого угла α прямоугольного треугольника — отношение катета, лежащего напротив α, к катету, прилежащему к α.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC} \tag{1.2}$$

Давайте теперь выведем полезную формулу.

2.2 Связь синуса с тангенсом

Как выразить $\sin(\alpha)$ через $\operatorname{tg}(\alpha)$? Очень просто! Возьмем прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α, а длина прилежащего к нему катета равна 1 (см. на рисунке).

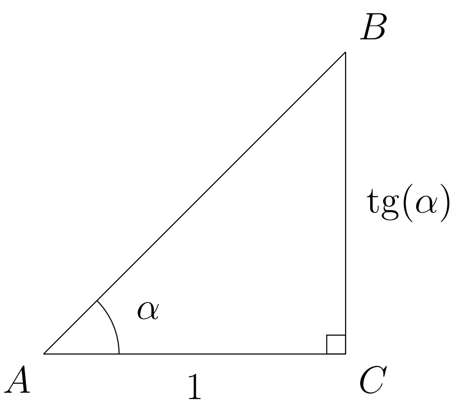


Рис. 1.3

Так как катет AC, прилежащий к углу α, равен 1, то оставшийся катет BC будет тангенсом.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC$$

По теореме Пифагора мы можем найти гипотенузу этого треугольника.

$$1^2 + BC^2 = 1^2 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = AB^2$$
$$AB = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}$$

Теперь найдем синус этого угла. А вместо гипотенузы и катета подставляем полученные выше выражения.

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}}$$

Запишем окончательный вид этой формулы.

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}}} \tag{1.3}$$

Но эта формула правдива только для треугольника на рисунке выше. Кто дал нам право утверждать, что она верна и для всех остальных прямоугольных треугольников? Ну ладно, пусть мы хотим выразить синус через тангенс не для треугольника на рисунке выше, а для какого-то другого. Но у этого другого треугольника один из острых углов все равно будет равен α, а значит для него выполняется теорема о соотношениях сторон в треугольниках. А это значит, что синус, рассчитываемый по формуле (1.3) для треугольника на рисунке выше будет равен синусу в любом другом прямоугольном треугольнике с острым углом, равным α.

В этом мощь теоремы о соотношениях сторон в треугольниках. Мы можем взять **удобный нам** треугольник, получить **красивые и простые** формулы для него (такие как связь синуса и тангенса), а потом смело утверждать, что они выполняются и для других треугольников!

Задание 1.2

Выразите $\operatorname{tg}(\alpha)$ через $\sin(\alpha)$.

Ответ на с. 25

2.3 Косинус

Осталось еще одно очень распространенное отношение, которое осталось без названия.

Определение 1.3

Косинус острого угла α прямоугольного треугольника — отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе (см. рис. 1.2).

$$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} \tag{1.4}$$

Теперь вы знакомы с синусом, косинусом и тангенсом. Выполнив следующие задания, вы узнаете еще несколько полезных формул.

Задание 1.3

Докажите, что $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Ответ на с. 26

Задание 1.4

Выразите $\cos(\alpha)$ через $\mathrm{tg}(\alpha)$.

Ответ на с. 26

Задание 1.5

Докажите следующие утверждения:

а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$;

б) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$;

в) Докажите, что $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Ответ на с. 27

На самом деле мы перечислили не все отношения сторон в прямоугольном треугольнике. Их еще примерно столько же. Однако используются они

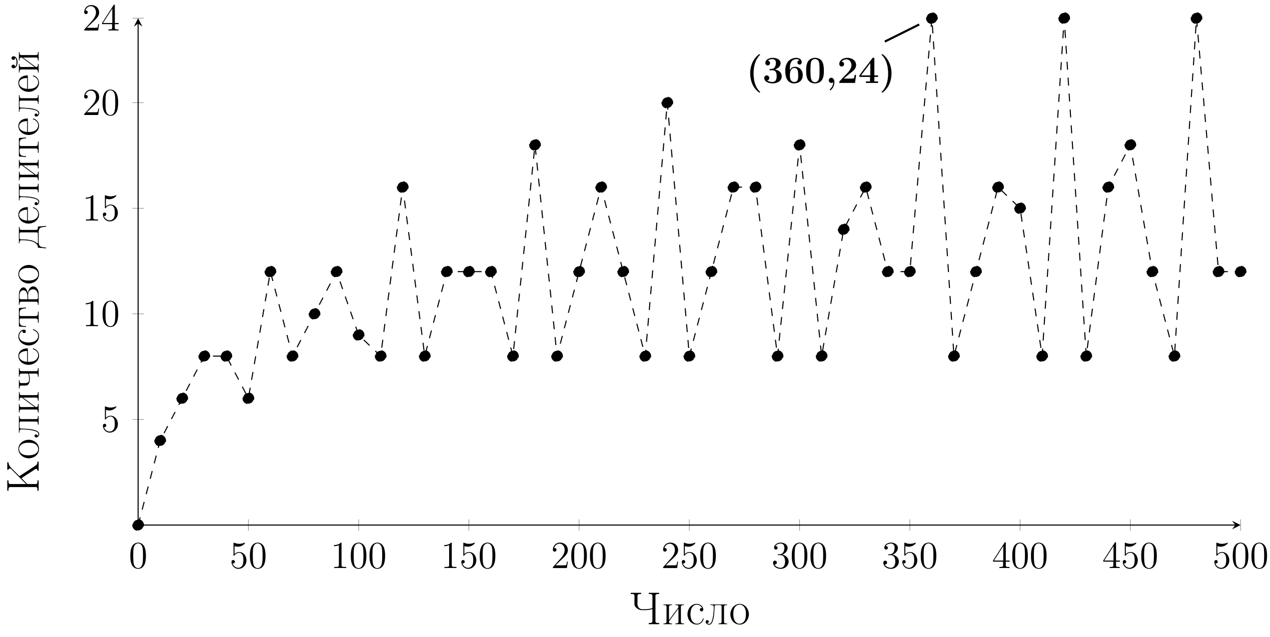


Рис. 1.4: Числа от 0 до 500 и количество их делителей (шаг – 10)

достаточно редко. Почему? Потому что все эти отношения выражаются друг через друга самым простым образом и пока нет особого смысла определять их. Мы вернемся к ним в следующей главе. А пока перенесем внимание на углы.

3 Радианная мера угла

До сих пор мы часто говорили об углах, однако еще нигде четко не было описано, в чем мы их измеряем. «Что за вопрос? – воскликнете вы. – Конечно же в градусах!». Вы правы. Можно измерять углы в градусах. Величина полного угла равна 360°. Но почему именно 360 градусов? Ведь можно было бы выбрать и другое число. И 400, и 200.

Это достаточно интересный вопрос. Деление круга на 360 частей (градусов) пошло от шумеров, так как у них была шестидесятеричная система счисления. Более того, календарь в Древнем Египте состоял из 360 дней. Есть и другие версии именно такого деления круга.

Вообще шумерам делить круг на 360 градусов было особенно выгодно, так как среди всех чисел от 0 до 500 только у трех (360, 420, 480) есть наибольшее количество делителей – 24. Наглядно это видно на рисунке 1.4.

Однако такое измерение углов неестественно и произвольно. Например во время Великой французской революции, когда пытались изменить все, включая календарь и названия игральных карт, был предложен способ делить окружность на 400 градусов. Деление на 400 градусов не лучше и не хуже деления на 360 градусов (только делителей меньше) — оно все также произвольно и неестественно.

Хорошо было бы измерять углы одним способом и быть спокойным — этот способ полностью обоснован и естественен. Оказывается, такой способ существует, и имя ему — **радианная мера угла**.

Я думаю, многие из вас знакомы с числом π:

$$\pi = 3.14159265358979...$$

Это число иррациональное и этот ряд чисел после запятой можно продолжать в бесконечность и не найдется никаких закономерностей их появления. Но это не главное. Число π получается при делении длины окружности на ее диаметр (или на удвоенный радиус).

$$\pi = \frac{l}{d} = \frac{l}{2r}$$

Магия этого отношения заключается в том, что оно одинаково **для любых окружностей**. То есть если взять **абсолютно любую** окружность и разделить ее длину на диаметр, то мы **всегда** получим π. Чтобы доказать это утверждение, придется обратиться к пределам. Сейчас мы этого делать не будем. Однако это общеизвестный факт. И именно этот факт и позволяет нам ввести новый способ измерения величины угла.

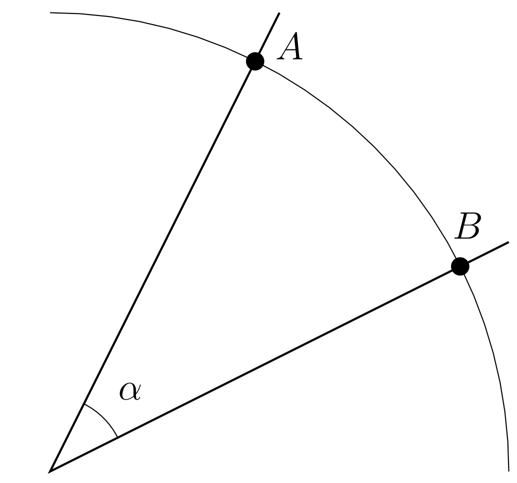


Рис. 1.5: Радианная мера α — отношение длины дуги AB к радиусу OA (или OB).

Определение 1.4

Радианная мера угла — отношение длины дуги окружности, заключенной между сторонами угла, к радиусу этой окружности (см. рис. 1.5).

Это отношение, прямо как и в случае с прямоугольными треугольниками, остается постоянным для окружностей любого размера. Оно характеризует только величину угла.

Углы в радианной мере угла измеряются в **радианах** (а не в градусах). Например, в случае рисунка 1.5 мы могли бы сказать что угол α равен $\overset{\frown}{AB}/AO$ радиан.

3.1 Связь градусов с радианами

Интуитивно можно представить себе угол в 1 градус, так как мы привыкли работать с градусами. Однако насколько велик угол в 1 радиан? И вообще, как, зная угол в градусах, получить его в радианах, и наоборот?

Возьмем полный угол. В градусной мере его величина равна 360°. Для определения величины этого угла в радианах, нам нужно найти длину дуги окружности, заключенной между сторонами угла и разделить ее на радиус окружности (см. определение 1.4). Однако между сторонами этого угла заключена вся окружность и длина ее дуги равна длине l самой окружности! Следовательно угол 360° соответствует l/r радиан. Вспоминаем формулу числа π:

$$\pi = \frac{l}{2r}$$

Умножаем левую и правую части на 2.

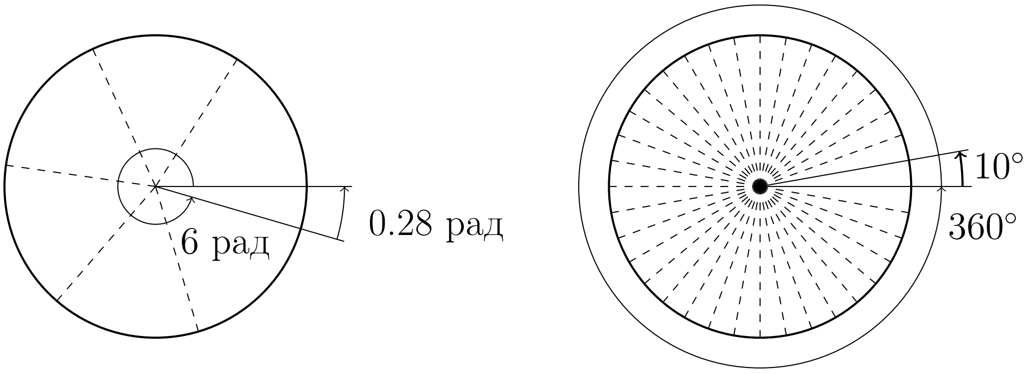
$$2\pi = \frac{l}{r}$$

В итоге, мы приходим к тому, что величина полного угла в градусной мере равна 360°, а в радианной мере равна 2π радиан. Составим теперь ключевую формулу, из которой станет ясна связь градусов с радианами.

$$360^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} 2\pi \text{ рад} \tag{1.5}$$

К чему эта надпись «по смыслу»? Дело в том, что по-настоящему **значение** выражение слева не равно **значению** выражения справа. Очевидно, что $360 \neq 6.28$. Однако **в смысле** величины угла они равны — 360° и 2π рад, действительно, обозначают один и тот же угол.

(а)



(б)

Рис. 1.6: (а) Сравнение 1 рад и 1°
(б) Полный угол в радианах и градусах.

Дальше все просто. 360° в 360 раз больше одного градуса. Следовательно, для получения одного градуса нужно разделить равенство (1.5) на 360:

$$1^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} \frac{\pi}{180}\ \text{рад} \tag{1.6}$$

Можно и наоборот. 2π радиан в 2π раза больше, чем один радиан. Следовательно, для получения одного радиана нужно разделить равенство (1.5) на 2π.

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} 1\ \text{рад} \tag{1.7}$$

На рисунке 1.6а вы можете сравнить величину угла в 1 радиан и в 1 градус. Стороны угла в 1 градус пришлось увеличить, иначе они бы сливались. Из равенства (1.7) видно, что угол в 1 радиан в $\approx$ 57.3 раза больше, чем угол в 1 градус. На рисунке 1.6б можно видеть, сколько радиан ($2\pi \approx 6.28$) и градусов (360) укладывается в полном угле. Так как угол в один градус трудно различим, углы на правой картинке сделаны по 10°.

Из равенств (1.6) и (1.7) легко получить формулы перевода n градусов в радианы и n радиан в градусы (просто умножаем соответствующие равенства

Рис. 1.7

на n).

$$n^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} n\frac{\pi}{180} \text{ рад (из градусов в радианы)} \tag{1.8}$$

$$n \text{ рад} \overset{\text{по смыслу}}{=} n\frac{180^\circ}{\pi} \text{ (из радианов в градусы)} \tag{1.9}$$

Можно запомнить эти две формулы наизусть, однако вам редко когда придется пользоваться ими в силу того, что в большинстве заданий используются углы с величинами, которые вы узнаете из следующего задания. К тому же, их очень просто вывести.

Задание 1.6

Заполните таблицу 1.1 и выучите ее наизусть.

Ответ на с. 27

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360
Радианы										

Таблица 1.1: Таблица перевода из градусов в радианы

Задание 1.7

Докажите, что для любого острого угла (в радианах) выполняется неравенство $\sin(\alpha) < \alpha$. Воспользуйтесь рисунком 1.7а.

Ответ на с. 28

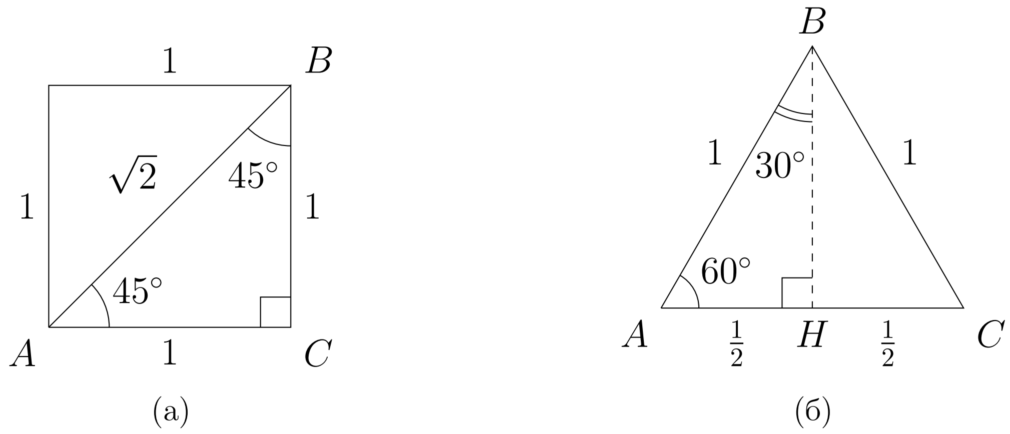


Рис. 1.8

Задание 1.8

Докажите, что для любого острого угла (в радианах) выполняется неравенство $\alpha < \mathrm{tg}(\alpha)$. Воспользуйтесь рисунком 1.7б.

Ответ на с. 28

4 Значения синуса, косинуса и тангенса

В предыдущих разделах я показал, что синус, косинус и тангенс какого-то острого угла в прямоугольном треугольнике всегда одни и те же. Они зависят только от угла. Если говорить более академично, то синус, косинус и тангенс — функции острого угла в прямоугольном треугольнике. Изменился угол – изменились и отношения сторон в треугольнике. Все это очень классно, но из этой информации совершенно нельзя понять, чему равны значения синуса, косинуса и тангенса.

Вот чему, например, равен $\sin(45°)$? Мы знаем, что во всех прямоугольных треугольниках с острым углом, равным 45° он одинаковый, но чему **конкретно** он равен? Вопрос нетривиальный. Вы можете нарисовать прямоугольный треугольник с углом 45° с помощью транспортира. После этого вам надо будет разделить длину катета, лежащего напротив этого угла, на гипотенузу. Однако точное значение синуса так не получить. Да и вообще, это не самый правильный путь.

Однако способы точно посчитать синус, косинус и тангенс определенных углов можно. В этом нам поможет геометрия с ее свойствами геометрических фигур и замечательными теоремами.

Вычислим синус, косинус и тангенс 45°. Давайте рассмотрим квадрат. Как известно, квадрат — четырехугольник с прямыми углами и равными сторонами. Диагональ квадрата делит его углы напополам, то есть на углы по 45°. Мы будем рассматривать квадрат с длиной стороны, равной 1 (см. рисунок 1.8а). Тогда длина его гипотенузы может быть рассчитана по теореме Пифагора.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB = \sqrt{2}$$

Теперь, зная длину катетов и гипотенузы, мы можем, наконец, узнать значение $\sin(45°)$:

$$\sin(45°) = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.10}$$

Но длины катетов равны друг другу, а значит $\sin(45°) = \cos(45°)$!

$$\cos(45°) = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.11}$$

Тангенс 45 градусов можно найти двумя способами. Либо напрямую, найдя отношение катета BC к катету AC, либо по формуле, доказанной в одном из заданий выше.

$$\mathrm{tg}(45°) = \frac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = \frac{BC}{AC} = 1 \tag{1.12}$$

Итак, мы нашли значения синуса, косинуса и тангенса для угла в 45° радиан для квадрата со стороной, равной 1. Но, по теореме о соотношениях сторон в треугольниках, найденные нами значения будут такими же для любого прямоугольного треугольника с остром углом, равным 45°!

Теперь давайте попытаемся определить, чему равен синус, косинус и тангенс для углов в 30 и 60 градусов. И здесь к нам на помощь вновь приходит геометрия со своими замечательными свойствами. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC с длиной стороны, равной 1 (см. рисунок 1.8б).

Так как треугольник равносторонний, все его углы равны 60 градусам. Проведем высоту BH. В равностороннем треугольнике высота является и биссектрисой (делит угол B пополам) и медианой (делит сторону AC пополам). В итоге наш равносторонний треугольник распадается на два одинаковых прямоугольных (они равны по трем сторонам).

Найдем длину высоты BH. Ее можно найти опять же по теореме Пифагора:

$$BH^2 + AH^2 = AB^2$$
$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Так как гипотенуза AB равна единице, то мы можем сразу сказать, чему равен синус 60 градусов:

$$\sin(60^\circ) = \frac{BH}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.13}$$

Найдем теперь косинус и тангенс 60 градусов:

$$\cos(60^\circ) = \frac{AH}{1} = \frac{1}{2} \tag{1.14}$$
$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \sqrt{3} \tag{1.15}$$

В задании 1.5 вы доказали очень важные формулы: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$ и $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$. Мы уже вычислили $\sin(60^\circ)$ и $\cos(60^\circ)$. Значит мы уже знаем значения $\sin(30^\circ)$ и $\cos(30^\circ)$ – они меняются местами!

$$\sin(60^\circ) = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{1}{2} \tag{1.16}$$
$$\cos(60^\circ) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.17}$$
$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1.18}$$

Задание 1.9

Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Найдите:

а) основание;

б) высоту, опущенную на основание;

в) высоту, опущенную на боковую сторону.

Ответ на с. 29

Теперь вы знаете значения синуса, косинуса и тангенса для углов в 30, 45 и 60 градусов! А что насчет других углов? А для других углов все не так просто. Красивых и коротких выражений типа $1/2$ или $\sqrt{3}$ для других углов получить обычно не получается. Более-менее удобные значения можно получить для угла в $72°$. Для этого необходимы формулы, которые вы только что вывели в задании 1.9.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом при основании, равным $72°$ (см. рисунок 1.9). Проведем биссектрису угла A. Она делит этот угол на два равных угла BAM и CAM – по $36°$. Сразу видно, что треугольник ABM – равнобедренный. Это следует из равенства углов при его основании: углы MAB и MBA оба равны $36°$ (свойство равнобедренного треугольника). Значит $BM = AM$.

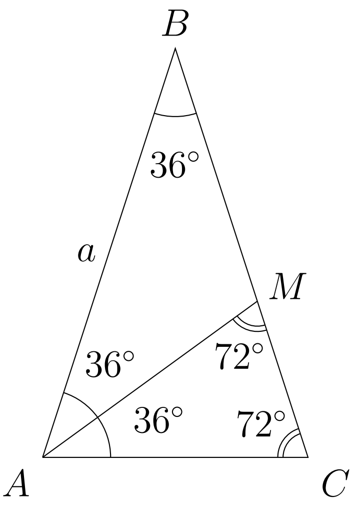


Рис. 1.9

Рассмотрим теперь нижний треугольник AMC. Как известно, сумма углов в треугольнике равна $180°$. Два угла в этом треугольнике нам известны: $36°$ и $72°$. Тогда находим последний угол: $\widehat{AMC} = 180° - (72° + 36°) = 72°$. Значит $AC = AM$.

Из равенств сторон, указанных выше, можем составить общее равенство: $AC = AM = BM$.

Воспользуемся теперь формулами, которые вы вывели в задании 1.9 и выразим основание AC треугольника ABC: $AC = 2a\cos(72°)$. Но мы показали выше, что $AC = AM$, а значит $AM = 2a\cos(72°)$.

Теперь выразим основание MC равнобедренного треугольника AMC:

$$MC = 2AM\cos(72°)$$

Заменяем AM на $2a\cos(72°)$ и получаем следующее выражение: $MC = 4a\cos^2(72°)$. Но $MC + BM = BC = a$. Мы уже показали, что $BM = AM$. Подставляем все полученные значения в равенство $MC + AM = a$:

$$4a\cos^2(72°) + 2a\cos(72°) = a$$
$$4\cos^2(72°) + 2\cos(72°) - 1 = 0$$

Обозначим $\cos(72°)$ за t. Получаем квадратное уравнение $4t^2 + 2t - 1 = 0$, решая которое, находим два корня:

$$t_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \qquad t_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

Получается у $\cos(72°)$ два значения? Нет. Значение t_2 отрицательное, а мы знаем, что косинус, по определению есть отношение длин сторон прямоугольного треугольника. А длины сторон в любом треугольнике всегда положительные, а значит их отношение не может быть отрицательным. Отбрасываем t_2.

$$\cos(72°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \tag{1.19}$$

Задание 1.10

Чему равен $\cos(36°)$?

Ответ на с. 30

5 Малые углы

На практике пользуются и градусной, и радианной мерами углов. Поговорим немного о градусной мере. Вам уже известно, что полный угол равен 360°.

В ситуациях, когда требуется указывать малые углы, используются угловые минуты и угловые секунды (по аналогии минутами и секундами для указания времени). Угловая минута — 1/60 часть градуса. Обозначается штрихом после числа — $1'$. Угловая секунда — 1/60 часть угловой минуты. Обозначается двумя штрихами после числа — $1''$.

К примеру, угол, равный 45 градусам, 37 угловым минутам и 9 угловым секундам надо записывать так: $45°37'9''$.

Задание 1.11

На какой угол поворачивается за одну секунду:

а) часовая стрелка часов;

б) минутная стрелка часов;

в) секундная стрелка часов?

Ответ на с. 31

Интересный факт, связанный с угловой минутой – с ней связана «разрешающая способность» нашего глаза. Человек при стопроцентном зрении и хорошем освещении воспринимает две точки, которые видны под углом в одну угловую минуту, как одну.

Теперь рассмотрим очень важное приближенное равенство, которое можно использовать, когда речь идет о малых углах:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \operatorname{tg}(\alpha), \text{ если } \alpha \text{ — малый угол в радианах} \tag{1.20}$$

Если вы посмотрите на рисунок 1.10, то прекрасно видно, что и синус, и сам угол (в радианах), и тангенс практически равны друг другу. И чем меньше угол α, тем меньше будет разница в их значениях.

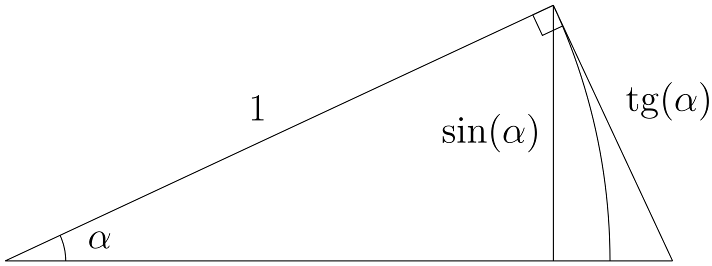


Рис. 1.10: Синус, тангенс и угол (в рад) почти одинаковые при малых углах.

Важно заметить, что формула (1.20) верна как для треугольника на рисунке 1.10, так и для любого другого (одна из сторон не обязательно должна быть равна 1) по теореме о соотношениях сторон в треугольниках.

Задание 1.12

Запишите приближенные формулы для синуса малых углов, выраженных в градусах.

Ответ на с. 31

Мы видим, что формулы $\sin(\alpha) \approx \alpha$, $\operatorname{tg}(\alpha) \approx \alpha$ верны с хорошей точностью для малых углов. Посмотрим, что произойдет, если угол не столь мал. Для угла в 30° точное значение синуса равно 0.5, а радианная мера равна $\pi/6 \approx 0.52$. Ошибка (или, как еще говорят, погрешность), которую дает формула $\sin(\alpha) \approx \alpha$, равна примерно 0.02, что составляет 4% от значения синуса. Можно сказать, что относительная погрешность при таком вычислении (отношение погрешности к значению синуса) составляет 4%. Для углов, меньших 10°, относительная погрешность формулы $\sin(\alpha) \approx \alpha$ меньше одного процента. Чем меньше угол α, тем меньше относительная погрешность формулы $\sin(\alpha) \approx \alpha$.

Существуют и другие формулы, позволяющие вычислять синусы и тангенсы — и не только малых углов — с хорошей точностью. Например, формула $\sin(\alpha) = \alpha - \alpha^3/6$ (напоминаем, что α измеряется в радианах!) дает относительную погрешность менее 1% уже для всех углов, не превосходящих $50°$. Позднее мы увидим, как оценить погрешность наших формул.

Задание 1.13

Пусть α — острый угол, измеренный в радианах. Докажите неравенство $\cos(\alpha) > 1 - \alpha^2$.

Ответ на с. 32

Задание 1.14

Под каким углом видно дерево высотой 10 метров с расстояния в 800 метров? Дайте ответ: а) в радианах; б) в угловых минутах.

Ответ на с. 32

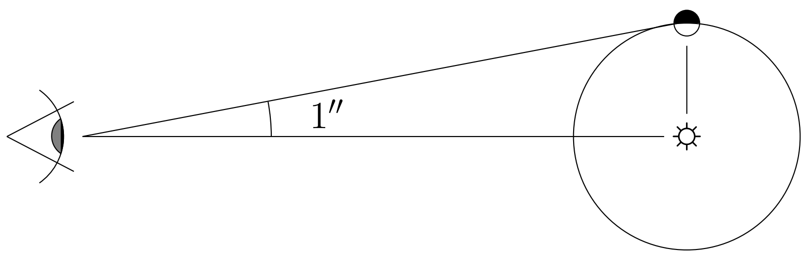


Рис. 1.11: Парсек.

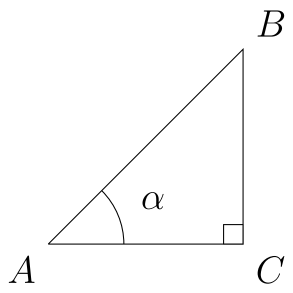
Задание 1.15

Найдите длину парсека в километрах. Парсек — распространенная в астрономии единица измерения расстояний. Он равен расстоянию, с которого радиус земной орбиты виден под углом $1''$ (смотрите рисунок 1.11). Радиус земной орбиты ≈ 150 миллионов километров.

Ответ на с. 33

Глава 1. Знакомство с тригонометрией

Теорема о соотношениях сторон в треугольниках: для любых прямоугольных треугольников с острым углом, равным α, отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных им сторон в другом треугольнике.



Понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла α прямоугольного треугольника:

$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AB} \qquad \cos(\alpha) = \frac{AC}{AB} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AC}$$

Связь синуса, косинуса и тангенса друг с другом:

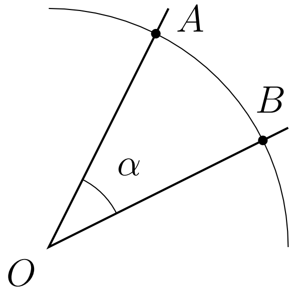
$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Равенство значений при рассмотрении второго острого угла:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha) \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Сумма квадратов синуса и косинуса острого угла всегда равна 1:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$



Радианная мера угла: $\alpha = \overset{\frown}{AB}/AO$ радиан.

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

Важное неравенство, связывающие синус, угол и тангенс (для любого острого угла):

$$\sin(\alpha) < \alpha < \mathrm{tg}(\alpha)$$

Приближенное равенство в случае малых углов:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \approx \mathrm{tg}(\alpha)$$

Ответы, решения и указания

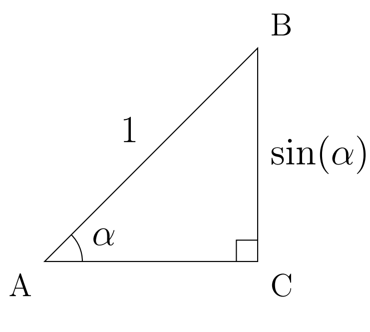
Здесь находятся ответы, решения и указания к заданиям учебника. Решения сделаны максимально понятным и подробными. Однако, если вы что-то не понимаете — обязательно задайте вопрос на сайте!

Глава 1

1.1 ***Указание:*** Доказательство абсолютно точно такое же, как и в случае прямоугольных треугольников.
с.7

Решение: Если нам даны два подобных (не обязательно прямоугольных) треугольника ABC и $A'B'C'$, то их сходственные стороны пропорциональны. Рассмотрим любую из сторон, например, BC и $B'C'$. Так как они пропорциональны, то $BC = k \times B'C'$. Теперь рассмотрим любую из двух оставшихся сторон, например, AC и $A'C'$. Они тоже пропорциональны: $AC = k \times A'C'$. Если мы берем отношение этих сторон, то коэффициент пропорциональности k сократится и отношения будут равны. Вот мы и доказали, что для любых подобных треугольников, отношение двух любых сторон равно отношению сходственных им сторон.

1.2 ***Указание:*** Воспользуйтесь рисунком ниже.
с.9



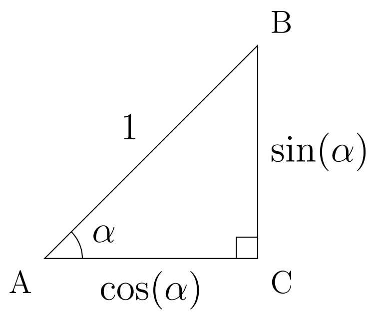
Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$.

Решение: На рисунке выше изображен прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной единице. Так как гипотенуза равна единице, то сторона BC является синусом. По теореме Пифагора находим недостающую сторону: $AC = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$. По определению, тангенсом α в данном треугольнике мы называем отношение BC/AC:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$$

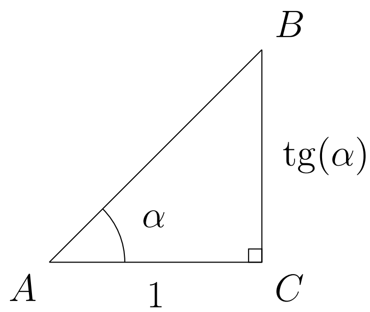
По теореме о соотношениях сторон в треугольниках эта формула верна для всех любых прямоугольных треугольников с острым углом, равным α. Вот мы и выразили тангенс через синус.

1.3 ***Указание:*** Используйте рисунок ниже.
с.10



Решение: Обратим взор на рисунок выше. Сторона AC является косинусом по определению (так как гипотенуза равна 1). Высчитаем гипотенузу по теореме Пифагора: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, что и является доказываемым утверждением.

1.4 ***Указание:*** Воспользуйтесь рисунком ниже.
с.10



Этот рисунок использовался для пояснения связи между синусом и тангенсом, однако ход рассуждения для поиска связи косинуса и тангенса абсолютно аналогичный.

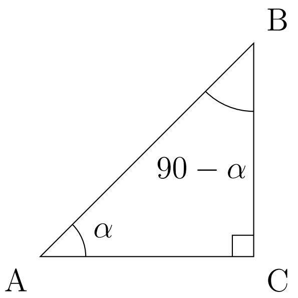
Ответ: $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}}$

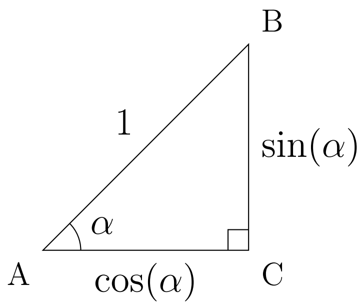
Решение: Посмотрим на рисунок выше. Найдем гипотенузу этого треугольника по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}$. Отношение стороны AC, которая равна 1, к гипотенузе AB по определению является косинусом:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}}$$

Формула связи косинуса с тангенсом выведена.

1.5 ***Указание:*** а) и б) Воспользуйтесь левым рисунком ниже. Угол в $(90 - \alpha)$ в прямоугольном треугольнике равен величине второго острого угла этого же треугольника. в) воспользуйтесь правым рисунком ниже.
с.10





Решение: а) и б) Посмотрите на левый рисунок выше. Сумма углов в треугольнике равна $180°$. Один из углов у нас прямой: $180° - 90° = 90°$. Эти оставшиеся 90 градусов делятся между углом α и другим углом, который равен $(90° - \alpha)$. Получается, мы просто рассматриваем синус и косинус второго угла в том же прямоугольном треугольнике. И если синус α есть отношение BC/AB, то синус угла $(90° - \alpha)$ есть отношение AC/AB, так как AC лежит напротив угла $(90° - \alpha)$. Но AC также и сторона, прилежащая к углу α, а значит отношение AC/AB, вообще-то говоря, является косинусом α. Вот мы и получили очень важную формулу $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$. Формула $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ выводится точно так же.

в) Взглянем на правый рисунок выше. Сторона AC, как мы уже показали раньше, равна $\cos(\alpha)$. Тангенсом α по определению является отношение BC/AC. Однако в случае треугольника на рисунке тангенс считается так:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

А по теореме о соотношениях сторон в треугольниках эта формула верна и для всех остальных прямоугольных треугольников с острым углом, равным α.

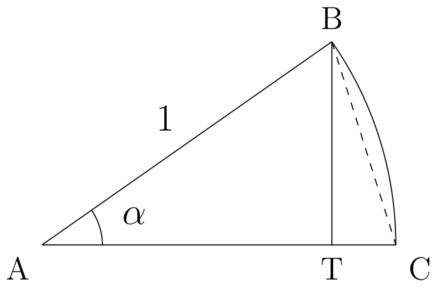
1.6 ***Указание:*** Воспользуйтесь формулой 1.8:
с.15

$$n^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} n\frac{\pi}{180} \text{ рад (из градусов в радианы)}$$

Решение: Заполненная таблица приведена в конце главы, в блоке ключевых моментов:

Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

1.7 ***Указание:*** Воспользуйтесь рисунком ниже. Длина хорды BC всегда
с.15 меньше длины дуги $\overset{\frown}{BC}$ окружности, которую она стягивает.



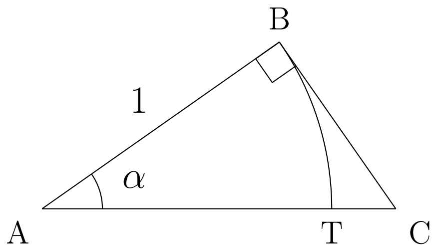
Решение: Рассмотрим рисунок выше. Отрезок, выделенный пунктиром BC, является хордой дуги $\overset{\frown}{BC}$. Из геометрии нам известно, что длина ходры всегда меньше длины дуги окружности, которую она стягивает. Но этот же отрезок, выделенный пунктиром, является гипотенузой треугольника TBC, где катет BT — синус α.

Катет BT треугольника всегда меньше гипотенузы BC. Почему? Потому из геометрии известно, что напротив большего угла лежит большая сторона. А самый большой угол в прямоугольном треугольнике — прямой угол. А напротив прямого угла всегда лежит гипотенуза. Следовательно — гипотенуза всегда больше своих катетов.

Получается, что $\sin(\alpha)$ меньше гипотенузы (пунктирного отрезка), а пунктирный отрезок, как хорда, меньше длины дуги. Получается, что и синус меньше длины дуги. А длина дуги окружности с единичным радиусом равна радианной мере угла, то есть α. Вот мы и доказали, что $\sin(\alpha) < \alpha$ для окружности единичного радиуса.

1.8 ***Указание:*** Сравните площадь сектора ABT круга с треугольником
с.16 ABC на рисунке ниже. Площадь сектора круга равна половине произведения радиуса круга на длину дуги.

Решение: Взглянем на рисунок ниже. Обратите внимание, что правый катет BC прямоугольного треугольника ABC проходит под прямым углом к радиусу AB. А прямая, которая проходит под прямым углом к радиусу, называется касательной. Это значит, что BC коснется гипотенузы AC за радиусом окружности в точке C (радиус окружности AT).



Получается, что сектор ABT круга вложен в прямоугольный треугольник ABC.

Площадь сектора круга равна половине произведения длины дуги на радиус: $S_{ABT} = \dfrac{\alpha}{2}$ (так как радиус равен 1).

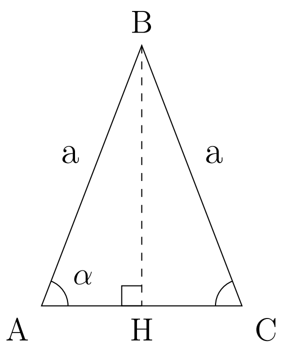
Площадь прямоугольного треугольника: $S_{ABC} = \dfrac{\mathrm{tg}(\alpha)}{2}$ (по той же причине).

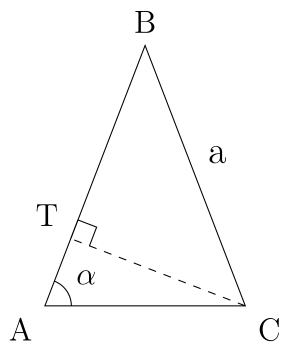
Так как площадь сектора круга вложена в площадь треугольника, то она, естественно, меньше: $S_{ABT} < S_{ABC}$. Следовательно:

$$\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(\alpha)$$

Домножим обе части неравенства на 2 и получим доказываемое неравенство: $\alpha < \mathrm{tg}(\alpha)$ для любых острых углов.

1.9 с.18 ***Указание:*** Воспользуйтесь рисунками ниже. Проведите высоту и получите два прямоугольных треугольника. Тогда можно будет использовать определения синуса, косинуса и тангенса.





Ответ: Рассмотрим рисунки выше. а) Основание $AC = 2a\cos(\alpha)$ - левый рисунок; б) Высота к основанию $BH = a\sin(\alpha)$ - левый рисунок; в) Высота к боковой стороне $TC = 2a\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ - правый рисунок.

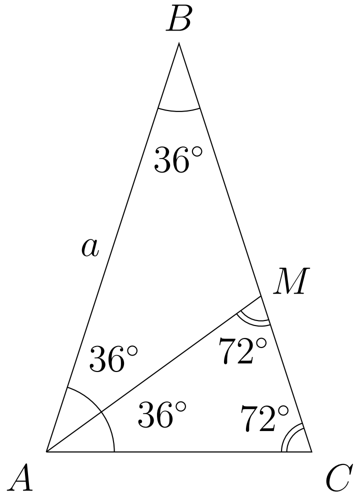
Решение: Посмотрите на левый рисунок выше. На нем изображен равнобедренный треугольник со стороной, равной a. Проведем высоту из вершины B к основанию AC. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию делит его на пополам. Значит $AH = HC$.

а) Найдем длину стороны AH. Косинусом в треугольнике ABH, по определению является отношение AH к a: $\cos(\alpha) = AH/a$. Следовательно (домножаем на a): $AH = a\cos(\alpha)$. Мы уже показали, что $AC = 2AH$, значит: $AC = 2a\cos(\alpha)$.

б) Отношение высоты BH, опущенной на основание AC, к гипотенузе a по определению является синусом угла α: $\sin(\alpha) = BH/a$. Домножаем на a: $BH = a\sin(\alpha)$.

в) Теперь смотрим на правый рисунок выше. Отношение катета TC, лежащего напротив угла α к гипотенузе AC по определению будет синусом этого угла: $\sin(\alpha) = TC/AC$. Но в пункте а) мы уже показали, чему равно основание AC через боковую сторону a: $AC = 2a\cos(\alpha)$. В итоге получаем $\sin(\alpha) = TC/2a\cos(\alpha)$. Домножаем обе стороны равенства на $2a\cos(\alpha)$: $TC = 2a\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. Вот мы и выразили длину высоты к боковой стороне.

1.10 с.20 ***Указание:*** Обратитесь к рисунку ниже и найдите, чему равна сторона AB.



Ответ: $\cos(36^\circ) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Решение: Смотрим на рисунок выше. Найдем, чему равна сторона AB. Из формул, выведенных в задании 1.9 мы можем записать следующее: $AB = 2BM\cos(36^\circ)$. Однако $BM = AM = AC$ (смотрите вывод косинуса 72° в разделе 4). К тому же $AC = 2a\cos(72^\circ)$. Нам уже известно, что $\cos(72^\circ) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Значит $AC = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Подставляем AC вместо BM в формуле стороны AB: $AB = a(\sqrt{5}-1)\cos(36^\circ)$. Но из условия дано, что $AB = a$. Значит получаем следующее: $a = a(\sqrt{5}-1)\cos(36^\circ)$. Сокращаем на a и делим обе части на $\sqrt{5}-1$: $\cos(36^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$. Умножаем числитель и знаменатель дроби справа на $\sqrt{5}+1$, знаменатель бу-

дет разностью квадратов (то есть равен 4), а в числителе будет $\sqrt{5}+1$.
Итого, имеем: $\cos(36^\circ) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1.11 ***Указание:*** Рассмотрите, сколько секунд занимает совершение полного
с.20 угла у часовой, минутной и секундной стрелок. Затем перейдите к 1 секунде для каждой из стрелок.

Ответ: а) $0.5'$; б) $1/10^\circ$; в) 6°.

Решение: а) Полный угол в 360° часовая стрелка описывает за $3600 \times 12 = 43200$ секунд (так как в часе 3600 секунд, а на циферблате полный круг составляют 12 часов): 360° за 43200 сек. Тогда для того, чтобы узнать, на сколько градусов сдвинется часовая стрелка за одну секунду, надо обе части равенства разделить на 43200:

$$\frac{1}{120}^\circ \text{ за 1 сек}$$

Получается, что за одну секунду часовая стрелка проходит 1/120 градуса или 0.5 угловых минут.

б) Полный угол в 360° минутная стрелка описывает за 3600 секунд: 360° за 3600 сек. Тогда для того, чтобы узнать, на сколько градусов сдвинется минутная стрелка за одну секунду, надо обе части равенства разделить на 3600:

$$\frac{1}{10}^\circ \text{ за 1 сек}$$

Получается, что за одну секунду минутная стрелка проходит 1/10 градуса.

в) Полный угол в 360° секундная стрелка описывает за 60 секунд: 360° за 60 сек. Тогда для того, чтобы узнать, на сколько градусов сдвинется секундная стрелка за одну секунду, надо обе чати равенства разделить на 60:

$$6^\circ \text{ за 1 сек}$$

Получается, что за одну секунду секундная стрелка проходит 6 градусов.

1.12 ***Указание:*** Преобразуйте градусы в радианы.
с.21

Ответ: $\sin(\alpha^\circ) \approx \alpha\dfrac{\pi}{180}$ рад для малых α°.

Решение: Воспользуемся формулой 1.8 для перевода градусов в радианы:

$$n^\circ \overset{\text{по смыслу}}{=} n\frac{\pi}{180} \text{ рад (из градусов в радианы)}$$

Получаем $\sin(\alpha^\circ) = \sin\left(\alpha\frac{\pi}{180}\text{ рад}\right)$. Значение $\pi/180$ меньше единицы (так как числитель меньше знаменателя). Значит и без того малый угол (в градусах) α°, будучи умножен на число, меньшее единицы ($\pi/180$), станет еще меньше. Значит правомерно приближенное равенство:

$$\sin(\alpha^\circ) = \sin\left(\alpha\frac{\pi}{180}\text{ рад}\right) \approx \alpha\frac{\pi}{180}\text{ рад}$$

1.13 с.22 ***Указание:*** Воспользуйтесь выведенным в задании 1.3 равенством:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

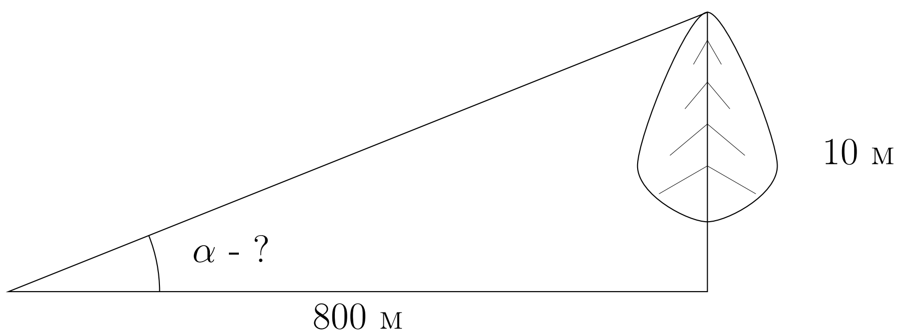
Используйте также неравенство $\sin(\alpha) < \alpha$ и факт, что $\sqrt{t} > t$, если $0 < t < 1$.

Решение: Из формулы $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) = 1$ найдем косинус: $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$. Теперь мы должны доказать, что $\sqrt{1-\sin^2(\alpha)} > 1-\alpha^2$. Рассмотрим неравенство $\sin(\alpha) < \alpha$. Знак неравенства не поменяется при возведении обеих частей в квадрат: $\sin^2(\alpha) < \alpha^2$. Домножим обе части на -1: $-\sin^2(\alpha) > -\alpha^2$. Прибавим к обеим частям неравенства единицу:

$$1-\sin^2(\alpha) > 1-\alpha^2$$

Но $\sqrt{1-\sin^2(\alpha)} > 1-\sin^2(\alpha)$, так как $0 < 1-\sin^2(\alpha) < 1$ (потому что $\sin(\alpha)$ не может быть больше 1). Если предположить, что синус может быть больше 1, то нарушится выведенное равенство $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, так как придется брать отрицательный $\cos^2(\alpha)$, чего не может быть, ведь квадрат любого числа всегда число положительное. Таким образом, мы доказали, что $\cos(\alpha) > 1-\alpha^2$.

1.14 с.22 ***Указание:*** Воспользуйтесь рисунком ниже, а также формулой приближенного равенства синуса, величины угла и тангенса.



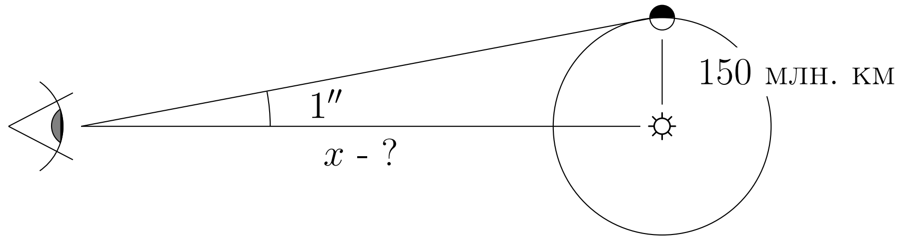
Ответ: ≈ 0.012 радиана или $\approx 43'$.

Решение: Из рисунка выше сразу видно, что мы можем найти тангенс искомого угла α:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{10}{800} = \frac{1}{80} = 0.0125$$

Так как расстояние у нас до дерева у нас очень большое (800 метров), то очевидно, что его видно под очень маленьким углом. А для очень маленьких углов справедливо приближенное равенство $\operatorname{tg}(\alpha) \approx \alpha$. Получается, что дерево видно приблизительно под углом в 0.0125 радиан. Переводя в градусы по формуле 1.8 имеем приблизительно 0.71625 градусов. Умножая на 60 мы можем получить этот угол в угловых минутах: $\approx 43'$.

1.15 ***Указание:*** Эта задача очень похожа на предыдущую задачу, только
с.22 теперь нам надо найти не угол (он уже дан), а прилежащий к этому углу катет (расстояние в 1 парсек). Опять же углы здесь маленькие и можно использовать приближенное равенство синуса, величины угла и тангенса.



Ответ: $\approx 30\,940\,000\,000$ километров.

Решение: Задача очень похожа на предыдущую задачу с деревом, только найти надо не угол, а катет. Посмотрим на рисунок выше. Радиус орбиты (правый катет) нам дан (150 миллионов километров). Угол нам дан (1 угловая секунда). Надо найти нижний катет (это и есть длина парсека). Отношение правого катета к нижнему по определению равно синусу угла, равного $1''$:

$$\frac{150\,000\,000}{x} = \operatorname{tg}(1'')$$

Так как угол в одну угловую секунду очень маленький, то мы можем применить приближенное равенство:

$$\operatorname{tg}(1'') \approx 1'' \frac{\pi}{180} = \frac{1}{3600}^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$$

Получаем следующее приближенное равенство:

$$\frac{150\,000\,000}{x} \approx \frac{\pi}{3600 \times 180}$$

И этого равенства выражаем x:

$$x \approx \frac{150\,000\,000 \times 3600 \times 180}{\pi} \approx 30\,940\,000\,000$$

Это и есть длина парсека в километрах.